

فراکتال‌ها پنجره ریاضیات رو به هستی

فراکتال‌ها شاخه ترفیقی جدیدی از ریاضیات و هنر محسوب می‌شوند و شاید علت آن که فراکتال‌ها در نظر بیشتر افراد به چشم تصاویری زیبا مناسب پیشخوان رایانه‌ها یا طرح‌های بدیع و اصیل کارت پستالی دیده می‌شوند همین آمیختگی ریاضی و زیباشناختی آن است.



جام جم آنلاین: فراکتال‌ها شاخه ترفیقی جدیدی از ریاضیات و هنر محسوب می‌شوند و شاید علت آن که فراکتال‌ها در نظر بیشتر افراد به چشم تصاویری زیبا مناسب پیشخوان رایانه‌ها یا طرح‌های بدیع و اصیل کارت پستالی دیده می‌شوند همین آمیختگی ریاضی و زیباشناختی آن است.

اکثر نظام‌های عینی طبیعت و بسیاری از مصنوعات بشری در چارچوب اشکال هندسی منتظم و یکدست هندسه اقلیدسی نمی‌گنجند.

هندسه اقلیدسی با همه معیارهایش در برابر تعریف نظام‌های طبیعی و مصنوعی جهان حرفی برای گفتن ندارد، اما از آن طرف هندسه فراکتالی راه‌هایی تقریباً نامحدودی را برای توصیف، اندازه‌گیری و پیش‌بینی پدیده‌های طبیعی در آستین دارد.

فراکتال‌ها در بسیاری از ساختارهای طبیعی مثل برف‌دانه‌ها، کوه‌ها، ابرها، ریشه، تنه و برگ درختان، رویش بلورها در سنگ‌های آذرین، شبکه آبراه‌ها و رودخانه‌ها، رسوبگذاری الکتروشیمیایی، رویش توده باکتری‌ها و سیستم عروق خونی، DNA و... دیده می‌شوند و با آنها می‌توان پدیده‌های طبیعی بسیاری را تشریح، تفسیر و پیش‌بینی کرد. بسیاری از عناصر مصنوع دست بشر نظیر تراشه‌های سیلیکونی، منحنی نوسانات بازار بورس، رشد و گسترش شهرها نیز از قوانین فراکتالی پیروی می‌کنند.

این شکل‌های هندسی زیبا به واسطه سازگاری پویا و جاذبه‌گریبی که در ارتباط میان خود و محیط پیرامونشان ایجاد می‌کنند از نوعی نظم دقیق در عین بی‌نظمی برخوردارند و پتانسیل شگفت‌آوری را برای عوض کردن دیدگاه و تفسیر ما از پدیده‌های عالم و نقش بنیادی ریاضیات برای توصیف و توضیح جهان در خود نهفته دارند.

هندسه فراکتال، مرزهای درک و استنباط بشر از ریاضیات را که به عنوان کالبدی از فرمول‌های پیچیده و ملال‌آور در اذهان تعریف شده است، فراتر می‌برد و با تلفیق هنر و ریاضیات بوضوح نشان می‌دهد معادلات ریاضی چیزی بیشتر از مجموعه‌ای از اعداد هستند.

شاید سودمندی مفاهیم ریاضی برای ایفای چنین نقش مهمی، موهبت خدادادی بی‌نظیری است که آنچنان که شایسته بوده درکش نکرده‌ایم. آیا با این اوصاف، تعریف کردن کل جهان با استفاده از معادلات ریاضی امکان‌پذیر است؟

هندسه بعد چهارم یا هندسه طبیعت

بنوا مندلبرو (1389-1303) پدر هندسه فراکتالی، مبدع واژه فراکتال و کاشف مجموعه مندلبرو است که تقریباً مادر تمام فراکتال‌ها محسوب می‌شود.

مندلبرو در نوجوانی، آموزش و تعلیمات رسمی منظمی کسب نکرد و به گفته خودش هیچ‌گاه نتوانست الفبا و جدول ضرب را درست و حسابی فرا بگیرد، اما در عین حال در برخی حوزه‌های زبان‌شناسی، نظریه بازی‌ها و احتمالات، دانش هوانوردی، مهندسی، علم اقتصاد، فیزیولوژی، جغرافیا، نجوم و صد البته فیزیک کارشناس و خبره بود.

مندلبرو از دانش پژوهان مشتاق تاریخ علم نیز بود و از همه مهم‌تر جزو نخستین ریاضیدانان جهان به لحاظ دسترسی به رایانه‌های پرسرعت محسوب می‌شود.

بنوا مندلبرو کشفیات بزرگ خود را با سریچی و ترمز از قدرت حاکم زمانه یا همان ریاضیات آکادمیک صورت داد. در گذشته، علوم و ریاضیات بر محور نظام‌های محدودی در سه بعد نخست یا همان خط، سطح و فضا دور می‌زدند که ظاهراً با جهان واقعی و مختصاتش که بعد چهارم گفته می‌شد میانه‌ای نداشتند.

در حقیقت ما در بعد چهارم یا پیوستار فضا زمان زندگی می‌کنیم. گرچه از زمان اینشتین به بعد بود که فهمیدیم حتی بعد سوم واقعا وجود ندارد و تنها مدلی برای واقعیت می‌تواند باشد، اما پس از مندلبرو بود که تازه متوجه شدیم بعد چهارم واقعا چیست و چگونه به نظر می‌رسد و از چهره فراکتالی آشوب و بی‌نظمی باخبر شدیم؛ کسی که چهره اصلی نظریه‌پردازی آشوب در زمانه ما محسوب می‌شود.

تحقیقات مندلبرو نهایتاً به دستاورد بزرگی منجر شد که در يك فرمول ساده ریاضی خلاصه می‌شود. این فرمول که امروز به افتخار نام مخترعش مجموعه مندلبرو نامیده می‌شود و برخی آن را بزرگ‌ترین کشف ریاضیات قرن بیستم می‌دانند يك حساب دینامیک و پویا بر اساس تکرار اعداد مرکب با صفر به عنوان نقطه شروع است.

فرمول مندلبرو خلاصه‌ای از درک و بینش‌های بسیاری است که مندلبرو از هندسه فراکتال طبیعت یا همان جهان واقعی بعد چهارم به دست آورده است. فرمول مندلبرو در تضاد آشکار با جهان آرمانی اشکال اقلیدسی بعدهای اول تا سوم است که دغدغه خاطر تقریباً تمامی ریاضیدانان پیش از مندلبرو بوده است.

در جایی که هندسه اقلیدسی پیرامون کمال مطلق تقریباً ناموجودی در طبیعت دور می‌زد و سعی داشت همه اشیا و مظاهر طبیعی را از دریچه تنگ نظم و ترتیب مجسم کند و قاعدتاً از توصیف واقعی شکل يك ابر، کوه، خط ساحلی یا حتی يك درخت ناتوان بود.

مندلبرو در کتاب هندسه فراکتال طبیعت (1362) خود می‌گوید: «#171؛ ابرها کروی نیستند، کوه‌ها مخروط نیستند، خطوط ساحلی مدور نیستند، پوست درخت صاف نیست و رعد و برق نیز خط سیر مستقیمی ندارد.»

پیش از مندلبرو، ریاضیدانان بر این باور بودند که پیچیدگی، بی‌قاعدگی، بخش‌بخش‌شدگی و بی‌نظمی اکثر الگوهای طبیعت فراتر از آن است که بتوانند به لحاظ ریاضیاتی توصیف و تبیین شوند. اما مندلبرو، هندسه فراکتالی جدیدی از طبیعت را بر اساس بعد چهارم و اعداد مرکب درک و توسعه بخشید که قادر به توصیف ریاضیات بی‌نظم‌ترین اشکال جهان واقعی است.

به گفته خودش هندسه فراکتالی صرفاً فصلی از کتاب ریاضیات نیست، بلکه موهبتی از دانش ریاضیات است که امکان مشاهده متفاوت يك جهان را برای همگان فراهم می‌آورد.

مندلبرو ثابت کرد بعد چهارم شامل ابعاد کسری می‌شود که بین سه بعد نخست قرار دارد و این مفهوم ابعاد بینابینی یا حد فاصل ابعاد را بعدهای فراکتالی نامید.

وی واژه فراکتال را بر اساس صفت لاتین فرکتوس نامگذاری کرد که با فعل لاتین فرنجر به معنی شکستن و خرد کردن متناظر بود و مفهوم ایجاد بخش‌های نامنظم و نامرتب را تداعی می‌کرد.

مندلبرو به لحاظ ریاضیاتی و گرافیکی نشان داده است طبیعت برای ایجاد اشکال مختلط و بی‌نظم و قاعده جهان واقعی چگونه از بعدهای فراکتال استفاده می‌کند. يك فراکتال به عنوان فرمی هندسی دارای اشکال نامنظم است، اما در بطن این تصاویر بی‌قاعده و نامنظم، نظم پنهان وجود دارد.

این نظم پنهان در بی‌نظمی در اصل تکرار پشت سر هم نسخه‌های شبیه به هم از شکل کلی است که ظاهراً به چشم نمی‌آید، ولی زمانی که بخش کوچکی از يك شکل نامنظم کلی همانند کوه را از نزدیک مشاهده می‌کنیم، با نسخه تکرار شده مشابهی از شکل کلی کوه در مقیاس کوچک‌تر مواجه می‌شویم و هر چه نزدیک‌تر شویم باز هم همان شکل را در مقیاسی خردتر می‌بینیم و این تسلسل تا بی‌نهایت می‌تواند ادامه داشته باشد.

می‌توان در هر جایی از طبیعت یا در واقع دنیای زیگزاگ طبیعت فراکتال‌ها و خود تشابهی را با هر مقیاسی سراغ گرفت. این واقعیت زیبا در هر برف دانه، هر خدنگ رعد و برق، هر درخت، هر شاخه و حتی در دستگاه گردش خون با رگ‌هایش و خلاصه از صدف دریا گرفته تا کهکشان‌های مارپیچ به چشم می‌خورند.

فرش قرمز دانش برای هندسه فراکتالی

امروز به لطف مندلبرو و نظریه معاصر بی‌نظمی، ما به درکی ریاضیاتی از برخی فعالیت‌های تائکون مخفی و رازآلود طبیعت نائل شده‌ایم. ما برای نخستین بار فهمیده‌ایم که چرا دو درخت نزدیک به یکدیگر در جنگل که در يك زمان و از يك خاک و از يك خانواده با ژن‌های یکسان در حال رشد و نمو هستند، هر کدام به شکلی منحصر به فرد از کار درخواهند آمد.

درست همانند هر برف دانه‌ای که از يك ابر و در يك زمان و تحت شرایط یکسانی تشکیل شده و فرود می‌آیند، ولی باز هم هر کدام از آنها بی‌مانند و یگانه هستند و با بقیه برف دانه‌ها فرق دارند.

چنین حالتی تنها به واسطه خلصت بی‌نهایتی که در بعدها و تأثیر متقابل تصادف و احتمال یا همان بی‌نظمی غیر قابل پیش‌بینی وجود دارد، امکان‌پذیر می‌شود. هندسه فراکتالی بر بسیاری از حوزه‌های علوم مانند اختر فیزیک و علوم زیستی سایه افکنده و به یکی از مهم‌ترین تکنیک‌های دانش گرافیک رایانه بدل شده است.

فراکتال‌ها در اختر فیزیک

هیچ‌کس واقعا نمی‌داند چند ستاره در آسمان شب چشمک می‌زند، ولی نحوه شکل‌گیری و قرارگیری آنها در عالم همواره مایه حیرت و شگفتی بوده است. اختر فیزیکدانان بر این باورند که ماهیت فراکتالی گاز میان ستاره‌ای کلید راهنمای این مسأله باشد.

فراکتال پخش و انتشار گازها به صورت سلسله مراتبی است که نظیر آن در خزیدن‌های دود در هوا یا موج خوردن ابرها در آسمان دیده می‌شود. اشکال آشفته‌گی ابرها در آسمان و در فضا الگویی نامنظم، اما تکرار شونده به آنها می‌بخشد که توصیفش بدون کمک گرفتن از هندسه فراکتالی غیرممکن خواهد بود.

فراکتال‌ها در علوم زیستی

مدلسازی طبیعت با استفاده از بازتابی‌های هندسه اقلیدسی که ضربان خون را به صورت موج سینوسی، درختان سوزنی برگ را به صورت مخروط و غشای سلولی را به صورت منحنی و سطوح صاف و ساده به نمایش می‌گذاشت، تغییر خواهد کرد.

نمونه‌های بارزی از اشکال فراکتالی را می‌توان در بدن انسان یافت. شناخته شده‌ترین مثال فراکتال بدن مجموعه رگ‌ها و شریان‌های دستگاه گردش خون پستانداران و انسان است.

ساختار نایزه‌ای شش‌های انسان از جمله فراکتال‌های زیبا و مثال‌زدنی زنده محسوب می‌شود که ویژگی خودمتشابهی و ایجاد نسخه‌های مکرر خردتر از نمونه کل را تا بیش از 15 انشعاب مسلسل و پی در پی به نمایش می‌گذارند.

کشفیات تازه در حوزه تحقیقات مغز به وجود یک ساختار فراکتالی مبتنی بر شش ضلعی‌ها اشاره دارد که ممکن است در نحوه سازماندهی میدان‌های گیرندگی بصری بخش قشری مغز نقش داشته باشد.

دانشمندان کشف کرده‌اند معماری پایه یک کروموزم ساختاری درختی دارد و هر کروموزم شامل میکروکروموزم‌های بسیاری می‌شود که می‌توان با تئوری فراکتال آن را توضیح داد.

از طرفی ویژگی خودمتشابهی ذاتی فراکتال‌ها در توالی‌های DNA نیز مشخص شده است. به عقیده برخی زیست‌شناسان، از شناسایی خصوصیات فراکتالی دی.ان.ای می‌توان برای حل روابط تکاملی جانوران استفاده کرد.

دانش زیست‌شناسی ممکن است در آینده برای ارائه مدل‌های جامعی از الگوها و فرآیندهای مشاهده شده در طبیعت از هندسه فراکتال استفاده کند.

فراکتال‌ها در گرافیک رایانه‌ای

وسیع‌ترین دامنه کاربرد فراکتال‌ها در زندگی روزمره در علوم رایانه است. بسیاری از طرح‌های فشرده‌سازی تصویری از الگوریتم‌های فراکتال استفاده می‌کنند.

هنرمندان گرافیک رایانه‌ای برای خلق مناظر بافت‌دار و دیگر مدل‌های پیچیده و پر طول و تفصیل از فرم‌های فراکتال زیادی استفاده می‌کنند.

ایجاد انواع تصاویر واقع‌نمایانه از سکناس‌های طبیعت نظیر تصاویری از ماه، رشته کوه‌ها و خطوط ساحلی که در بسیاری از جلوه‌های ویژه سینمایی دیده می‌شوند به لطف همین الگوریتم‌های فراکتالی امکان پذیر هستند.

و اما حرف آخر

دانشمندان دریافته‌اند هندسه فراکتال ابزار قدرتمندی برای رازگشایی از طیف گسترده‌ای از نظام‌ها و حل کردن مشکلات مهم علوم کاربردی است.

نظام‌های فراکتالی عینی و ملموس جهان فهرست بلند بالایی دارند که به سرعت در حال رشد است. فراکتال‌ها دقت ما در توصیف و طبقه‌بندی کردن اشیای تصادفی یا ارگانیک را بهبود بخشیده‌اند، اما ممکن است کامل و بی‌عیب نباشند.

شاید فراکتال‌ها فقط به جهان ما نزدیک‌ترند و یکی عین آن نیستند. برخی دانشمندان هنوز بر این باورند که بی‌نظمی وجود دارد و هیچ معادله ریاضی آن را به طور کامل و بی‌نقص توصیف نخواهد کرد.

شاید هم از نظر بسیاری، فراکتال‌ها چیز بیشتری از تصاویر زیبا عرضه نخواهند کرد، اما فراکتال‌ها و هندسه فراکتالی هر چه باشد منظره متفاوتی از واقعیت جهانی را که در آن زندگی می‌کنیم به نمایش گذاشته است.

فراکتال در دل طبیعت

هندسه فراکتالی را در حیات وحش هم می‌توان دید. به عنوان مثال فراکتال پر زرق و برقی که طاووس برای جلب نظر جفت به کار می‌برد.

غایت فراکتال سبزیجات، فراکتالی از نوع ماریپیچ لگاریتمی در کلم بروکلی که به ماریپیچ طلایی معروف است

سرپاوران دریایی که 65 میلیون سال پیش منقرض شدند. الگوی رشد پوسته آنها ماریپیچ لگاریتمی است

این پهنه‌های پوشیده از نمک الگوی ثابت ولی تصادفی را که مشخصه‌های فراکتالی است به نمایش می‌گذارد.

مهریار میرنیا - جام‌جم